

การจำลองการเคลื่อนที่ของจรวดภายในชั้นบรรยากาศมาตรฐาน The Simulations of Rocket Flight Trajectory in Standard Atmosphere

สุรสิทธิ์ ปาลสาร¹ และวรเดช มโนสร้อย²

Surasith Palasarn¹ and Woradej Manosroi²

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏชัยภูมิ

¹Division of Mathematics, Faculty of Education, Chaiyaphum Rajabhat University

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

²Faculty of Engineering, Chiang Mai University

Received: December 27, 2019

Revised: July 11, 2020

Accepted: May 27, 2020

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงผลการจำลองการเคลื่อนที่ของจรวดในชั้นบรรยากาศมาตรฐาน โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งได้แก่ วิธีรุงเงอ-คุททา อันดับสี่ และ วิธีลาเดา การจำลองทั้งสองวิธีให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน จากการศึกษาผลของปัจจัยต่าง ๆ ได้แก่ แรงขับ มุมของฐานปล่อย ขนาดของจรวด รวมถึงผลของบรรยากาศ การจำลองพบว่า ความสูงและความเร็วเพิ่มขึ้นเมื่อเพิ่มค่าแรงขับสูงขึ้น มุมของฐานปล่อยมีผลให้แนวทางการเคลื่อนที่เปลี่ยนไป โดยระยะทางเพิ่มขึ้นแต่ความสูงลดลงเมื่อลดมุมของฐานปล่อยลง ระดับความสูงที่จรวดทำได้ลดลงเมื่อเพิ่มขนาดจรวดให้ใหญ่ขึ้น การรวมผลของบรรยากาศและตำแหน่งความสูงของจรวด ช่วยให้การจำลองมีความถูกต้องและเชื่อถือได้

คำสำคัญ: จรวด, ชั้นบรรยากาศมาตรฐาน, ระเบียบวิธีรุงเงอ-คุททา อันดับสี่, ระเบียบวิธีลาเดา

Abstract

This article presents the simulated results of rocket flight trajectories in standard atmosphere with numerical methods, including Runge-Kutta fourth-order Method and Radau Method. These simulations give agreeable results. After studying various factors such as thrust force, angle of launcher, rocket size as well as atmospheric factors, the researcher found that altitude and velocity will rise when the thrust force is increased. The angle of launcher affects movement direction provided that the distance increases while altitude will be lowered when angle of launcher is reduced. Furthermore, the altitude of the rocket will be lessened when rocket size is enlarged. The result of adding atmosphere and altitude of rocket can make the simulation even more precise and reliable.

Keyword: rocket, standard atmosphere, Runge-Kutta fourth-order Method, Radau Method



บทนำ

อากาศยานแบ่งออกเป็นสองประเภทใหญ่ ๆ นั่นก็คือ อากาศยานที่ทำงานในชั้นบรรยากาศของโลก และ อากาศยานที่ทำงานในอวกาศเหนือชั้นบรรยากาศของโลก ขึ้นไป สำหรับอากาศยานที่ทำงานภายใต้ชั้นบรรยากาศของโลก เช่น เครื่องบิน เฮลิคอปเตอร์ จรวด เป็นต้น อากาศยานเหล่านี้ เคลื่อนที่ผ่านชั้นบรรยากาศ คุณสมบัติของชั้นบรรยากาศเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ขึ้นอยู่กับความสูงจากพื้นโลก ตำแหน่งของจุดสังเกต เวลาในระหว่างวัน การรู้คุณสมบัติของชั้นบรรยากาศ ช่วยให้เรานำแบบจำลองของชั้นบรรยากาศมาตรฐาน ช่วยให้วิศวกรประเมินประสิทธิภาพของอากาศยานในขั้นตอนแรกของการออกแบบได้

แบบจำลองชั้นบรรยากาศในงานวิจัยนี้ อ้างอิงจากงานวิจัยของ Anderson (2005) ซึ่งได้แสดงแบบจำลองชั้นบรรยากาศมาตรฐาน ในรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ ความดัน และความหนาแน่นของอากาศ กับความสูงเหนือระดับน้ำทะเล ร่วมกับผลจากการวัดค่าของบอลูนตรวจอากาศ จากงานวิจัยของศูนย์ปฏิบัติการวิจัยกองทัพอากาศ สหรัฐอเมริกา เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจรวดในชั้นบรรยากาศ ได้รับผลของแรงทางอากาศพลศาสตร์ที่กระทำกับจรวด ซึ่งแรงดังกล่าวนี้ขึ้นอยู่กับความหนา

แน่นของอากาศ ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งความสูงของจรวด ณ เวลาใด ๆ ของการเคลื่อนที่นั่นเอง การจำลองนี้รวมผลของตำแหน่งความสูงของจรวดเข้าไปด้วย ซึ่งจะทำให้การจำลองถูกต้องยิ่งขึ้น

ในการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องนั้น White (2014) ได้นำเสนอการจำลองในความเป็นจริง ที่รวมทุก ๆ แรงที่กระทำต่อจรวด โดยใช้วิธีเชิงตัวเลข Miguel (2015) ได้นำเสนอการพัฒนาโปรแกรมจำลอง Mathematica เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ของจรวด ภายใต้อิทธิพลของแรงลม สำหรับงานวิจัยนี้ไม่พิจารณาถึงแรงลม และผลจากการหมุนหรือการแกว่งของจรวด ซึ่งเกิดขึ้นได้เมื่อจรวดมีเสถียรภาพในการบิน ซึ่งได้จากการออกแบบที่เหมาะสมตามหลักอากาศพลศาสตร์ และไม่มีการใช้กลไกอื่นใดในการควบคุม

ความรู้พื้นฐาน

ตัวแปรพื้นฐานที่เปลี่ยนแปลงตามระดับความสูงที่สำคัญ คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (acceleration of gravity) หรือ g ค่าความเร่งนี้เปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$g = g_0 \left(\frac{r}{r+h} \right)^2 \quad (1)$$

ในที่นี้ g_0 คือ ความเร่งจากแรงโน้มถ่วงที่ระดับน้ำทะเล ค่า r คือ รัศมีของโลก และ h คือ ความสูงจากระดับน้ำทะเล แรงโน้มถ่วงของโลกดึงดูดโมเลกุลของก๊าซเอาไว้ เกิดเป็นชั้นบรรยากาศห่อหุ้มโลกเอาไว้ ซึ่งประกอบด้วยก๊าซชนิดต่าง ๆ ดังนั้น ชั้นบรรยากาศจะมีความหนาแน่นสูงที่ผิวโลก และน้อยลงเมื่อความสูงจากผิวโลกเพิ่มขึ้น ตัวแปรที่ใช้บ่งบอกคุณสมบัติของชั้นบรรยากาศก็คือ ความดัน P ความหนาแน่น ρ และอุณหภูมิ a ค่าต่าง ๆ เหล่านี้มีความสัมพันธ์กันเรียกว่าสมการก๊าซอุดมคติ (equation of state) นั่น คือ

$$P = \rho RT \quad (2)$$

โดยที่ R คือ ค่าคงที่จำเพาะของก๊าซ ในที่นี้ คือ อากาศ จากสมการนี้ เราบอกได้ว่าความดัน P แปรผันตามค่าความหนาแน่น ρ ของอากาศ สำหรับค่าอุณหภูมิของอากาศแสดงดังภาพ 1

จากภาพ 1 แสดงอุณหภูมิของอากาศตั้งแต่ระดับน้ำทะเลจนถึงระดับความสูง 105 km จะเห็นว่าอุณหภูมิของอากาศมีช่วงที่เปลี่ยนแปลงลดลงหรือเพิ่มขึ้นตามระดับความสูง สลับกับช่วงที่อุณหภูมิคงที่ ดังนั้น จะมีสมการความสัมพันธ์ระหว่าง ความดัน ความหนาแน่น และอุณหภูมิต่างกัน นั่นคือ ช่วงที่อุณหภูมิคงที่ สมการความสัมพันธ์เป็น ดังนี้

$$\frac{P}{P_1} = e^{-[g_0/(RT)](h-h_1)} \quad (3)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-[g_0/(RT)](h-h_1)} \quad (4)$$

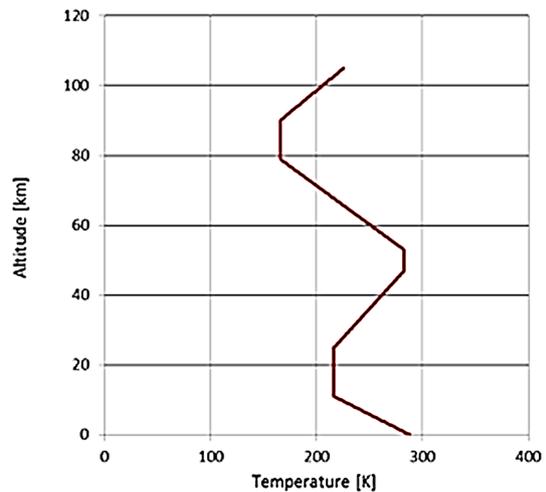
โดยที่ P_1, ρ_1 และ h_1 หมายถึง ความดัน ความหนาแน่น และความสูงที่จุดเริ่มต้นของช่วงคงที่

ต่อไปพิจารณาช่วงเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ กราฟอุณหภูมิมีความชันเฉพาะค่าหนึ่ง แทนด้วย a ดังสมการ

$$a = \frac{T - T_1}{h - h_1} = \frac{dT}{dh} \quad (5)$$

ดังนั้น สามารถหาค่าอุณหภูมิ T บนช่วงนี้ ได้จากสมการ

$$T = T_1 + a (h-h_1) \quad (6)$$



ภาพ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างระดับความสูง อุณหภูมิสัมบูรณ์

Note. From *Introduction to flight* (5th ed.). By J. D. Anderson, 2005, New York: McGraw Hill.

ความดัน P และ ความหนาแน่น ρ_1 ณ จุดใด ๆ บนช่วงนี้หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-g_0/(aR)} \quad (7)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\{[g_0/(aR)]+1\}} \quad (8)$$

จากสมการที่ 4, 6 และ 8 สามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาแน่นและระดับความสูงได้ดังแสดงในภาพ 2 จะเห็นว่าความหนาแน่นของอากาศมีค่าสูงที่ระดับความสูงต่ำ และมีค่าน้อยที่ระดับสูงขึ้นไป

ผลของความหนาแน่นของอากาศนี้ทำให้เกิดแรงอากาศพลศาสตร์กระทำกับตัวจรวด เรียกว่า แรงต้านอากาศ แทนด้วย D แรงนี้เกิดจากการเคลื่อนที่ผ่านอากาศของจรวด ค่าแรงต้านจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความเร็วของวัตถุและความหนาแน่นของอากาศซึ่งขึ้นอยู่กับระดับความสูง จึงรวมไว้ในการคำนวณด้วย แรงต้านอากาศมีค่าตามสมการ

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_d \quad (9)$$

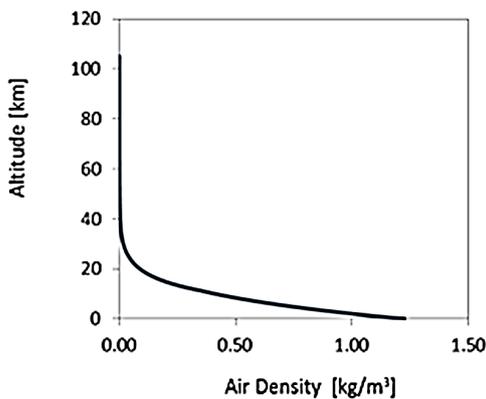
โดยที่ V คือ ค่าความเร็วของจรวด A แทนค่าพื้นที่หน้าตัดของจรวด C_d คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ (Stine, 1994)

ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับมวลเชื้อเพลิง ที่ช่วยให้สามารถหามวลเชื้อเพลิงที่ใช้ไปได้ นั่นก็คือ ค่าการดล จำเพาะ (specific impulse) หรือ I_{sp} เป็นค่าเฉพาะตัวของเชื้อเพลิงแต่ละชนิดโดยความสัมพันธ์ระหว่างมวลของเชื้อเพลิงและค่าการดลจำเพาะมาจากสมการ

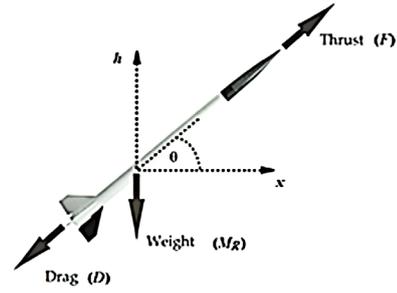
$$I_{sp} = \frac{I}{W_p} = \frac{\int_0^t F dt}{m_p g} \quad (10)$$

โดยที่ I คือ ค่าการดลที่เกิดขึ้น W_p คือ มวลเชื้อเพลิง F คือ แรงขับที่เกิดขึ้นจากมอเตอร์จรวด สำหรับจรวดชนิดเชื้อเพลิงแข็งจะเรียกส่วนขับเคลื่อนว่ามอเตอร์ แต่ถ้าเป็นจรวดเชื้อเพลิงเหลวจะเรียกว่าเครื่องยนต์ (Sutton, 1992) t คือ เวลาชั่วขณะใด ๆ ที่มอเตอร์กำลังทำงาน ดังนั้นเราจะได้มวลเชื้อเพลิงที่ใช้ไป m_p เท่ากับ

$$m_p = \frac{\int_0^t F dt}{I_{sp} g} \quad (11)$$



ภาพ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างระดับความสูงกับความหนาแน่นอากาศ



ภาพ 3 แผนภาพแสดงแรงกระทำกับจรวด

สมการการเคลื่อนที่ของจรวด พิจารณาในสองทิศทาง คือ ทิศทางในแนวตั้งและแนวระดับ พิจารณาแผนภาพของแรงในภาพ 3 จะได้สมการการเคลื่อนที่ในแนวระดับ คือ

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F \cos\theta - D \cos\theta \quad (12)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{I}{M} (F - D) \cos\theta \quad (13)$$

โดยที่ M คือ มวลจรวดเท่ากับ $M_0 - m_p$ รวมสมการที่ 9 ในสมการ 13 จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(F - \frac{1}{2} \rho V^2 A C_d)}{(M_0 - m_p)} \cos\theta \quad (14)$$

เช่นเดียวกันสมการการเคลื่อนที่ในแนวตั้งเขียนได้เป็น

$$M \frac{d^2h}{dt^2} = F \sin\theta - Mg - D \sin\theta \quad (15)$$

จัดรูปใหม่ได้

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{1}{M} (F - D) \sin\theta - g \quad (16)$$

รวมสมการที่ 1, 9 และ 15 จะได้สมการการเคลื่อนที่ในแนวตั้งกลายเป็น

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{(F - \frac{1}{2}\rho V^2 AC_d)}{(M_o - m_p)} \sin\theta - g_o \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 \quad (17)$$

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ด้วยวิธีเชิงตัวเลข

จากสมการที่ 14 และ 16 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งมีพจน์ของ V ยกกำลังสองอยู่ในสมการ ดังนั้นสมการจะไม่เป็นเชิงเส้น การวิเคราะห์สามารถทำได้ โดยวิธีเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Gilat & Subramaniam, 2008) โดยเรามีระบบสมการเชิงอนุพันธ์สองระบบ ในแนวระดับและแนวตั้ง

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{(F - \frac{1}{2}\rho V^2 AC_d)}{(M_o - m_p)} \cos\theta \quad (18)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

ระบบสมการในแนวตั้ง คือ

$$\frac{dv_h}{dt} = \frac{(F - \frac{1}{2}\rho V^2 AC_d)}{(M_o - m_p)} \sin\theta - g_o \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 \quad (19)$$

$$\frac{dh}{dt} = v_h$$

การจำลองปัญหาด้วยวิธีเชิงตัวเลข ในงานวิจัยนี้เป็นการเปรียบเทียบกันระหว่าง วิธีรุ่งเงอ-คุททา อันดับสี่ (Burden & Faires, 1997) และวิธีลาเดา (Deuflhard & Bornemann, 2000) แสดงดังตาราง 1

ตาราง 1

ตารางบุชเชอของ (a) วิธีรุ่งเงอ-คุททาอันดับสี่ (b) วิธีลาเดา

0	0	0	0	0			
1/2	1/2	0	0	0			
1/2	0	1/2	0	0	1/3	5/12	-1/12
1	0	0	1	0	1	3/4	3/4
	1/6	1/3	1/3	1/6		3/4	3/4

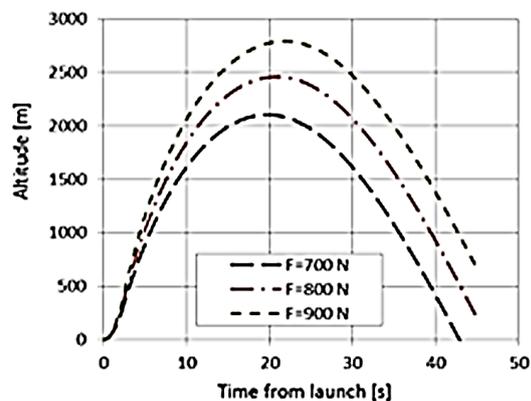
(a)

(b)

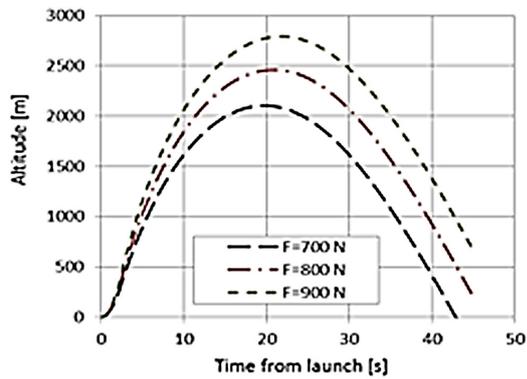
วิธีรุ่งเงอ-คุททา อันดับสี่ เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น ของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นที่รู้จักกันดี เป็นวิธีแบบชัดแจ้ง (explicit) เราเลือกใช้วิธีนี้เพื่อเป็นมาตรฐานและเปรียบเทียบกับวิธีลาเดาที่เป็นวิธีเชิงปริยาย (implicit) เพื่อดูผลลัพธ์ของทั้งสองวิธี ถ้าหากทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกัน เราอาจเลือกใช้วิธีลาเดาในการคำนวณในครั้งต่อ ๆ ไป เนื่องจากคุณสมบัติของวิธีเชิงปริยายที่มีเสถียรภาพของผลลัพธ์ที่ดีกว่า

ผลการจำลองการเคลื่อนที่

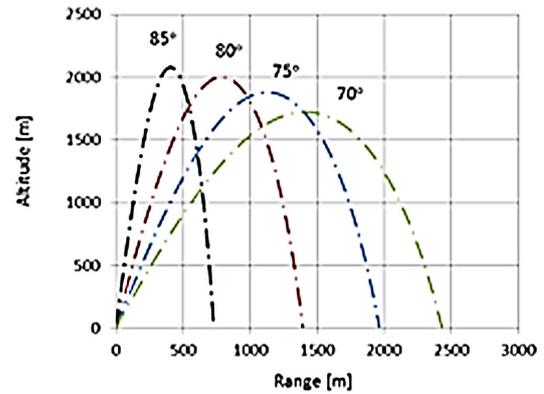
สมการการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้นจำลองผลโดยใช้วิธีเชิงตัวเลข เพื่อศึกษาผลที่ได้ของทั้งสองวิธี โดยใช้ค่าช่วง $\Delta t = 0.09$ s ภาพ 4, 5 เป็นการจำลองการเคลื่อนที่โดยการกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ คือ $t_b = 2.5$ s (เวลาที่มอเตอร์หยุดทำงาน) $M_o = 6$ kg, $d = 10$ cm, $C_d = 0.4$, $I_{sp} = 240$ s, $\theta = 90^\circ$ ผลลัพธ์การเปรียบเทียบความสูงต่อเวลาภาพ 6, 7 แสดงความเร็วรวมทั้งสองแกนของจรวดต่อเวลา เมื่อเปลี่ยนค่าแรงขับ $F = 700$ N, 800 N และ 900 N โดยที่เงื่อนไขอื่น ๆ เหมือนกัน ภาพที่ 8, 9 เป็นผลลัพธ์จากการเปลี่ยนมุมของฐานปล่อย $\theta = 85^\circ$, 80° , 75° และ 70° ของแต่ละวิธี โดยเงื่อนไขคือ $F = 700$ N, $t_b = 2.5$ s ภาพ 10, 11 จำลองการเปลี่ยนขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของจรวด $d = 8$ cm, 9 cm, 10 cm ตามลำดับ ภาพ 12, 13 การจำลองด้วยวิธีลาเดา เปรียบเทียบระหว่างผลของความสูงและบรรยากาศกับผลจากการคำนวณโดยไม่คำนึงถึงผลดังกล่าว โดยเงื่อนไขคือ $F = 700$ N, $t_b = 2.5$ s, $M_o = 6$ kg, $d = 10$ cm, $C_d = 0.4$, $\theta = 90^\circ$



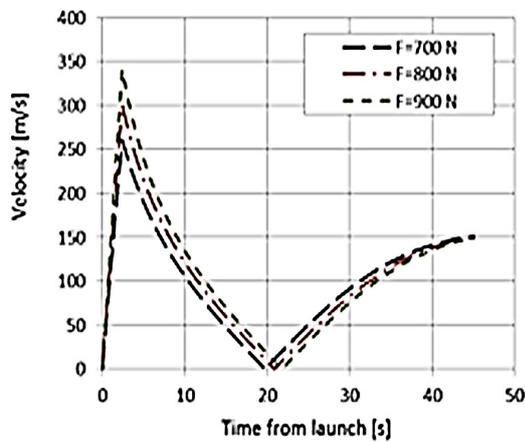
ภาพ 4 ผลของการเปลี่ยนค่าแรงขับ F ที่มีต่อความสูง ที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีรุ่งเงอ-คุททาอันดับสี่



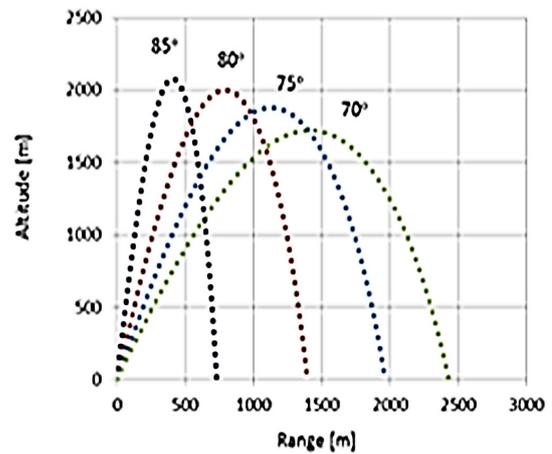
ภาพ 5 ผลของการเปลี่ยนค่าแรงขับ F ที่มีต่อความสูงที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีลาเดา



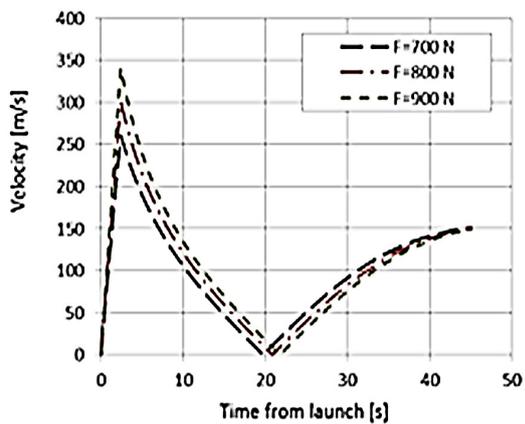
ภาพ 8 ผลของการเปลี่ยนมุม θ ต่อความสูงและระยะทางที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีรุงเงอ-คัททออันดับสี่



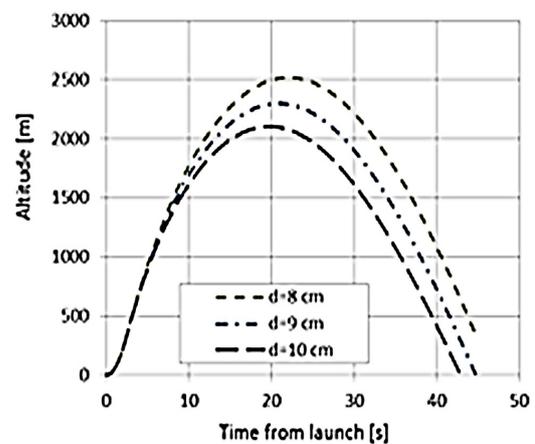
ภาพ 6 ผลของการเปลี่ยนค่าแรงขับ F ที่มีต่อความเร็วที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีรุงเงอ-คัททออันดับสี่



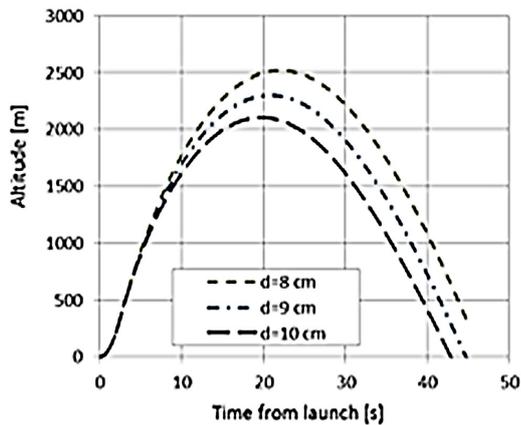
ภาพ 9 ผลของการเปลี่ยนมุม θ ต่อความสูงและระยะทางที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีลาเดา



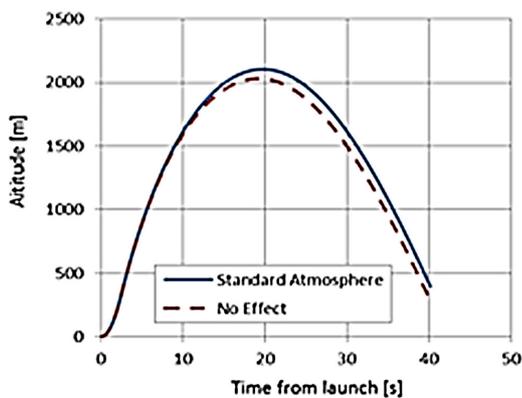
ภาพ 7 ผลของการเปลี่ยนค่าแรงขับ F ที่มีต่อความเร็วที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีลาเดา



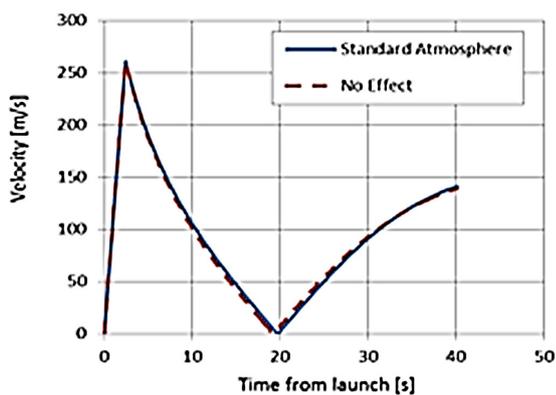
ภาพ 10 ผลของการเปลี่ยนค่า d ต่อความสูง ที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีรุงเงอ-คัททออันดับสี่



ภาพ 11 ผลของการเปลี่ยนค่า d ต่อความสูง ที่ได้จากการจำลองด้วยวิธีลาเดา



ภาพ 12 การเปรียบเทียบการจำลองระดับความสูง ระหว่างการรวมผลของความสูงและชั้นบรรยากาศกับการคำนวณโดยไม่รวมผลข้างต้น



ภาพ 13 การเปรียบเทียบการจำลองความเร็ว ระหว่างการรวมผลของความสูงและชั้นบรรยากาศกับการคำนวณโดยไม่รวมผลข้างต้น

ภาพ 4, 5 แสดงผลการจำลองความสูงต่อเวลา เมื่อแรงขับเปลี่ยนแปลงไป จากการจำลองทั้งสองวิธีให้ผลเหมือนกัน นั่นคือ เมื่อเพิ่มแรงขับจาก 700 N เป็น 800 N และ 900 N จรวดจะไปได้สูงขึ้น ความสูงที่สุดของ 900 N จะสูงกว่า 800 N และ 700 N ตามลำดับ เช่นเดียวกัน ภาพ 6, 7 แสดงความเร็วของจรวดเมื่อแรงขับเปลี่ยนแปลง จรวดมีความเร็วสูงสุด ที่เวลา $t = 2.5$ s ซึ่งเป็นเวลาที่มอเตอร์หยุดทำงาน จากนั้นความเร็วจะเริ่มลดลง จนเป็นศูนย์ที่จุดสูงสุด และจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเมื่อตกลงมา จากภาพจะเห็นว่าเมื่อแรงขับสูงขึ้นทำให้ความเร็วเพิ่มขึ้นด้วย

ภาพ 8, 9 แสดงให้เห็นแนวการเคลื่อนที่ของจรวด เมื่อเปลี่ยนมุมของฐานปล่อย การจำลองทั้งสองวิธีให้ผลลัพธ์เหมือนกัน เมื่อมุมเงยลดลง จรวดจะไปได้ไกลขึ้น ระดับความสูงของจรวดจะลดลง ภาพ 10, 11 แสดงผลของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของจรวด จากการจำลองทั้งสองวิธี เมื่อเพิ่มขนาดจรวดให้ใหญ่ขึ้น ความสูงที่จรวดทำได้จะน้อยลง

ภาพ 12, 13 แสดงการรวมผลของบรรยากาศให้ผลการจำลองที่มีระดับความสูงมากกว่าการคำนวณโดยไม่พิจารณาผลของบรรยากาศเล็กน้อย ในขณะที่ความเร็วจากทั้งสองแบบ มีค่าใกล้เคียงกัน

สรุปผล

บทความนี้แสดงผลการจำลองการเคลื่อนที่ของจรวด โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อศึกษาผลกระทบต่อ การเคลื่อนที่เนื่องจากชั้นบรรยากาศ วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ ได้แก่ วิธีรุงเงอ-คุททา อันดับสี่ และวิธีลาเดา การจำลองทั้งสองวิธีให้ผลลัพธ์ที่ตรงกัน จากการศึกษาผลของปัจจัยต่าง ๆ คือ แรงขับ มุมของฐานปล่อย ขนาดของจรวดรวมถึงผลของบรรยากาศ การจำลองพบว่าเมื่อเพิ่มแรงขับเคลื่อน ความสูงและความเร็วจะเพิ่มขึ้นตามไปด้วย มุมของฐานปล่อยลดลงทำให้ความสูงที่ได้ลดลงแต่ระยะทางเพิ่มขึ้น ผลของขนาดของจรวด ถ้าเพิ่มขนาดใหญ่ขึ้นจะทำให้แรงดันอากาศสูงขึ้น ทำให้ระยะความสูงของจรวดลดลง การรวมผลของบรรยากาศและตำแหน่งความสูงของจรวด ทำให้การจำลองมีความถูกต้องและน่าเชื่อถือยิ่งขึ้น



References

- Anderson, J. D. (2005). *Introduction to flight* (5th ed.). New York: McGraw Hill.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (1997). *Numerical analysis* (6th ed.). California: Brook/Colepublishing.
- Deuflhard, P., & Bornemann, F. (2000). *Scientific computing with ordinary differential equations*. New York: Springer-Verlag Inc.
- Gilat, A., & Subramaniam, V. (2008). *Numerical method for engineers and scientists*. NJ: John Wiley & Son Inc.
- Hairer, E., & Wanner, G. (1999). Stiff differential equations solved by Radau methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 111(1-2), 93–111.
[https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(99\)00134-X](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00134-X)
- Okninski, A., Marciniak, B., Bartkowiak, B., Kaniewski, D., Matyszewski, J., Kindracki, J., & Wolanski, P. (2015). Development of polish small sounding rocket program. *Acta Astronautica*, 108(2), 46-56.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.12.001>
- Miguel, T., & Pinto, O. (2015). *A model and sounding rocket simulation tool with Mathematica* (Master's thesis). Instituto Superior Tecnico, Lisboa. Portugal.
- Stine, G. H. (1994). *Handbook of model rocketry*. New York: John Wiley & Son Inc.
- Sutton, G. P. (1992). *Rocket propulsion elements* (6th ed.). New York: John Wiley & Son Inc.
- White, L. (2014). Modeling rocket flight in the low-friction approximation. *Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One+Two*, 6(1), Article 5. <http://dx.doi.org/10.5038/2326-3652.6.1.4861>

